2M

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко[1], *И.В. Петренко*[2]
[1]Донецкий национальный технический университет, Украина
[2]Государственный университет информатики и искусственного интеллекта,
г. Донецк, Украина

Дифференциальные преобразования тождеств как метод получения новых соотношений

В работе предложены несколько дифференциальных и интегральных преобразований разных тождеств математического анализа. Метод имеет хорошие математические возможности и выходит за рамки данной статьи. Он может быть применен для доказательства тождеств и неравенств, для получения новых тождеств и соотношений. Так, предложен более простой способ доказательства формулы Эйлера. Кроме того, использование тождеств Лагранжа и формулы Эйлера позволяет получить новую формулу для скалярного и векторного произведений в комплексной форме. Новые тождества, полученные данным методом, представлены в таблицах.

Введение

Хорошо известно, что над тождествами можно выполнить ряд операций, не нарушая при этом тождественного равенства. Например, тождества допускают операции дифференцирования, интегрирования, не говоря о тождественных преобразованиях [1]. При этом операции дифференцирования и интегрирования не нарушают тождественности равенства, но приводят к внешне иным соотношениям. Поэтому некоторые операции над тождествами можно рассматривать как метод получения новых равенств. Во многих случаях полученные равенства могут быть доказаны «чисто» алгебраическим путем, но, как мы, покажем дифференциальный и интегральный подходы часто бывают более эффективными.

Покажем, что вычисление производной от обеих частей тождественного равенства $f(x)=g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на рассматриваемом промежутке Δ, приводит к тождеству

$$f'(x)=g'(x). \tag{1}$$

Для этого выберем произвольную точку $x_o \in \Delta$ и запишем очевидное равенство $f(x_o)=$ $=g(x_o)$. Откуда следует, что

$$f(x)-f(x_o)=g(x)-g(x_o) \text{ или } \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_o$, получим равенство $f'(x_o)=g'(x_o)$, а в силу того, что точка x_o произвольная, имеем равенство (1).

Аналогично покажем, что имеет место равенство $f''(x)=g''(x)$ и т.д., если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы надлежащее число раз на соответствующем промежутке Δ.

Нетрудно показать, что частные производные от обеих частей тождественного равенства $f(x,y)=g(x,y)$ приводит к тождествам

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}g(x,y),\ \ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}g(x,y). \tag{2}$$

Аналогичные рассуждения можно применить по отношению к операции интегрирования тождества $f(x)=g(x)$. Если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно первообразными функций $f(x)$ и $g(x)$, то имеет место равенство

$$F(x)=G(x)+C, \tag{3}$$

где C – постоянная интегрирования, находится из равенства (3) в точке x_o, в которой тождество (3) определено однозначно.

Целью статьи является дальнейшее развитие хорошо известного в математике метода преобразования тождеств.

Формула Эйлера

Обозначим $\cos x + i\sin x = f(x)$. Дифференцируем левую и правую части равенства

$$f'(x) = -\sin x + i\cos x = i(\cos x + i\sin x) = if(x).$$

В результате имеем простейшее дифференциальное уравнение $f'(x)=if(x)$ с разделяющимися переменными. Выполним стандартную процедуру

$$\frac{df}{dx} = if(x) \Rightarrow \frac{df}{f(x)} = idx \Rightarrow \int \frac{df}{f(x)} = i\int dx + C,\ \ln|f(x)| = ix + \ln C_1,$$

$$f(x) = C_1 e^{ix}.$$

Из условия $f(0)=\cos 0 + i\sin 0 = 1 \Rightarrow f(0) = C_1 e^{i0} = 1$, находим $C_1 = 1$, и, окончательно, $f(x)=e^{ix}$. Итак,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \tag{4}$$

Замечание. В стандартном курсе математического анализа эта формула выводится в теории степенных рядов намного более объемными вычислениями [2], [3].

Рассмотрим формулу Муавра

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx). \tag{5}$$

для $n=2$: $e^{i2x} = \cos(2x) + i\sin(2x)$. С другой стороны,

$$e^{i2x} = e^{ix}e^{ix} = (\cos x + i\sin x)(\cos x + i\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x.$$

Приравняя действительную и мнимую части равенств, получим известные тригонометрические формулы двойных аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x. \tag{6}$$

Аналогично, найдем

$$e^{i3x} = e^{i2x}e^{ix} = (\cos 2x + i\sin 2x)\ (\cos x + i\sin x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x +$$
$$+ i(\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x) = \cos^3 x - 3\cos x + i(3\sin x - 4\sin^3 x).$$

Подставим формулы двойного аргумента (6) и используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Преобразуем и приравняем действительную и мнимую части равенств, получим известные тригонометрические формулы тройного аргументов

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \tag{7}$$

В общем случае,

$$e^{inx} = e^{i(n-1)x}e^{ix} = (\cos((n-1)x) + i\sin((n-1)x))\ (\cos x + i\sin x) = \cos((n-1)x)\cos x -$$
$$-\sin((n-1)x)\sin x + i(\sin((n-1)x)\cos x + \cos((n-1)x)\sin x).$$

Приравняя действительную и мнимую части равенств, получим известные тригономет-

рические формулы

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \cos((n-1)x)\cos x - \sin((n-1)x)\sin x,\\ \sin(nx) &= \sin((n-1)x)\cos x + \cos((n-1)x)\sin x.\end{aligned} \quad (8)$$

В частности,

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x,\\ \sin 4x &= \sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x.\end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя формулы тройного аргумента (7), получим

$$\cos 4x = \cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x = \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos x - \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\sin x =$$

$$= 4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 4\sin^4 x = 4(\cos^4 x + \sin^4 x) - 3.$$

$$\cos 4x = 4(\cos^4 x + \sin^4 x) - 3. \quad (10)$$

Аналогично,

$$\sin 4x = \sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x = \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\cos x + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\sin x =$$

$$= -4\sin^3 x\cos x + 4\cos^3 x\sin x.$$

$$\sin 4x = 4\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos x\sin x. \quad (11)$$

Тождество Лагранжа

Запишем очевидное равенство для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ [4]

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\varphi + |\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2\sin^2\varphi = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2.$$

По определениям скалярного и векторного произведений векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\varphi$ данное равенство можно записать в виде

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2. \quad (12)$$

Это хорошо известное тождество Лагранжа.

Используя определения скалярного и векторного произведений векторов, можно записать эти определения как производные по параметру

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|,\\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.\end{cases} \quad (13)$$

Умножая второе равенство на i, складываем с первым равенством

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left((\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\right) = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|,$$

$$\frac{\partial\left(|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\right)}{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = i\partial\varphi, \quad \int\frac{d\left(|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\right)}{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = i\int d\varphi,$$

$$\ln\left(|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\right) = i\varphi + \ln C \Rightarrow |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = Ce^{i\varphi}.$$

При $\varphi = 0$ имеем $C = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$. Откуда

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|e^{i\varphi}. \quad (14)$$

Запишем формулу Муавра для рассматриваемого случая

$$\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\right)^n = |\mathbf{a}|^n\cdot|\mathbf{b}|^n e^{in\varphi}. \quad (15)$$

Заметим, что в векторной алгебре величина площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равна $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Используя тождество Лагранжа (12), получим выражение для площади параллелограмма через скалярное произведение векторов

$$S=\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}. \qquad (16)$$

Величина площади треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равна

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}. \qquad (17)$$

Основное тригонометрическое тождество

Запишем очевидное тригонометрическое равенство и преобразуем его

$$2\sin x\cos x=2\cos x\sin x\Rightarrow 2\sin x\cos xdx=2\cos x\sin xdx\Rightarrow$$

$$2\int\cos x\sin xdx=2\int\cos x\sin xdx+C\Rightarrow\int\sin xd(\sin x)=-\int\cos xd(\cos x)+C\Rightarrow$$

$$\sin^2 x=-\cos^2 x+C\Rightarrow\cos^2 x+\sin^2 x=C.$$

Из условия $\cos^2(0)+\sin^2(0)=1$ находим $C=1$, и окончательно,

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1. \qquad (18)$$

Аналогичные действия выполним для гиперболического аналога.

$$2shx\cdot chx=2chx\cdot shx\Rightarrow 2shx\cdot chxdx=2chx\cdot shxdx\Rightarrow$$

$$2\int shx\cdot chxdx+C=2\int chx\cdot shxdx\Rightarrow 2\int shxd(shx)+C=2\int chxd(chx)\Rightarrow$$

$$sh^2x+C=ch^2x\Rightarrow ch^2x-sh^2x=C.$$

Из условия $ch^2(0)-sh^2(0)=1$ находим $C=1$, и окончательно,

$$ch^2x-sh^2x=1. \qquad (19)$$

Тригонометрические формулы двойных и тройных аргументов

Рассмотрим хорошо известное тригонометрическое равенство $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Дифференцируем левую и правую части равенства

$$(\sin 2x)'=2\cos 2x,\quad (2\sin x\cos x)'=2(\cos^2x-\sin^2x).$$

Откуда следует известная формула

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x. \qquad (20)$$

Теперь дифференцируем последнее равенство

$$(\cos 2x)'=-2\sin 2x,\quad (\cos^2x-\sin^2x)'=-4\sin x\cos x.$$

Мы получили исходное равенство

$$\sin 2x=2\sin x\cos x. \qquad (21)$$

Замечание. Формулы (20) и (21) обладают свойством обратимости в том смысле, что дифференцирование первой формулы приводит ко второй, а дифференцирование второй – к первой.

Производная первой из формул может быть обращена назад обратной операцией дифференцированию – интегрированием. Например, интегрируя последнее равенство, получим

$$\int \sin 2xdx = \int 2\sin x\cos xdx = \int \sin x\cos xdx + \int \sin x\cos xdx =$$

$$= -\int \cos xd(\cos x) + \int \sin xd(\sin x) \Rightarrow -\frac{\cos 2x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Запишем равенство в точке $x = 0$

$$-\frac{\cos 0}{2} = -\frac{\cos^2 0}{2} + \frac{\sin^2 0}{2} + C \Rightarrow C = 0, \quad -\cos 2x = -\cos^2 x + \sin^2 x,$$

возвращаемся к формуле (20).

Аналогично, рассмотрим гиперболические равенства

$$sh2x = 2shxchx, \qquad (22)$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x\ . \qquad (23)$$

Дифференцируем левую и правую части равенств

$$(sh2x)' = 2ch2x, \quad (2shxchx)' = 2(ch^2x + sh^2x).$$

Откуда следует формула (23). Теперь дифференцируем равенство (23)

$$(ch2x)' = 2sh2x, \quad (ch^2x + sh^2x)' = 4shxchx.$$

Получим исходное равенство (22).

Как для тригонометрических формул (20) и (21), так и для формул (22) и (23), имеет место свойство обратимости. Например, интегрируя равенство (23), получим

$$\int sh2xdx = 2\int shxchxdx = \int shxchxdx + \int shxchxdx = \int shxd(shx) + \int shxchxd(chx) \Rightarrow$$

$$\frac{ch2x}{2} = \frac{sh^2 2x}{2} + \frac{ch^2 2x}{2} + C.$$

Запишем равенство в точке $x = 0$, $\frac{ch0}{2} = \frac{sh^2 0}{2} + \frac{ch^2 0}{2} + C \Rightarrow C = 0$, возвращаемся к формуле (22).

Рассмотрим хорошо известное тригонометрическое равенство $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Дифференцируем левую и правую части равенства

$$(\sin 3x)' = 3\cos 3x, \quad (3\sin x - 4\sin^3 x)' = 3\cos x - 12\sin^2 x\cos x =$$

$$= 3\cos x - 12(1-\cos^2 x)\cos x = 12\cos^3 x - 9\cos x.$$

Откуда следует известная формула

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\ . \qquad (24)$$

Теперь дифференцируем это равенство

$$(\cos 3x)' = -3\sin 3x, \quad (4\cos^3 x - 3\cos x)' = 3\sin x - 12\cos^2 x\sin x =$$

$$= 3\sin x - 12(1-\sin^2 x)\sin x = 12\sin^3 x - 9\sin x.$$

Получим исходное равенство

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\ . \qquad (25)$$

Рассмотрим известное гиперболическое равенство $sh3x = 3shx + 4sh^3x$. Дифференцируем левую и правую части равенства

$$(sh3x)' = 3ch3x, \quad (3shx + 4sh^3x)' = 3chx + 12sh^2xchx = 3chx + 12(ch^2x - 1)chx =$$

$$= -9chx + 12ch^3x.$$

Откуда следует формула

$$ch3x = -3chx + 4ch^3x. \qquad (26)$$

Теперь дифференцируем это равенство

$$(ch3x)' = 3sh3x,\ \left(-3chx + 4ch^3 x\right)' = -3shx + 12ch^2 xshx =$$
$$= -3shx + 12\left(1 + sh^2 x\right)shx = 9shx + 12sh^3 x.$$

Получим исходное равенство

$$sh3x = 3shx + 4sh^3 x. \tag{27}$$

Формулы тригонометрических соотношений суммы и разности аргументов

Рассмотрим хорошо известное тригонометрическое тождество

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\ . \tag{28}$$

Дифференцируем его по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x + y) = \cos(x + y),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x \cos y + \cos x \sin y\right) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ .$$

В результате получим формулу

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ . \tag{29}$$

Теперь дифференцируем равенство (29) по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos(x + y) = -\sin(x + y),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos x \cos y - \cos x \cos y\right) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

В результате получим формулу (28).

Рассмотрим тождество

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\ . \tag{30}$$

Дифференцируем его по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin(x - y) = -\cos(x - y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x \cos y - \cos x \sin y\right) = -\cos x \sin y - \sin x \cos y -$$
$$-\cos(x - y) = -\cos x \cos y - \sin x \sin y\ .$$

В результате получим формулу

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\ . \tag{31}$$

Теперь дифференцируем полученное равенство по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}\cos(x - y) = \sin(x - y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos x \cos y + \sin x \sin y\right) = -\cos x \sin y + \sin sx \cos y.$$

В результате получим формулу (30).

Рассмотрим тождество

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]. \tag{32}$$

Дифференцируем его по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)].$$

В результате получим формулу

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]. \tag{33}$$

Дифференцируем равенство (32) по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin x \cdot \cos y = -\sin x \cdot \sin y,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)].$$

В результате получим формулу

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)]. \quad (34)$$

Формулы гиперболических соотношений суммы и разности аргументов

Рассмотрим известное гиперболическое тождество

$$sh(x+y)=shxchy+chxshy\ . \quad (35)$$

Дифференцируем его по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}sh(x+y)=ch(x+y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(shxchy+chxshy\right)=chxchy+shxshy.$$

В результате получим формулу

$$ch(x+y)=chxchy+shxshy. \quad (36)$$

Теперь дифференцируем равенство (36) по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}ch(x+y)=sh(x+y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(chxchy+shxshy\right)=shxchy+chxshy.$$

В результате получим формулу (35).

Рассмотрим тождество

$$sh(x-y)=shxchy-chxshy\ . \quad (37)$$

Дифференцируем его по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}sh(x-y)=-ch(x-y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(shxchy-chxshy\right)=shxshy-chxchy.$$

В результате получим формулу

$$ch(x-y)=chxchy-shxshy. \quad (38)$$

Теперь дифференцируем равенство (38) по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}ch(x-y)=-sh(x-y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(chxchy-shxshy\right)=chxshy-shsxchy.$$

В результате получим формулу (37).

Рассмотрим тождество

$$shx\cdot chy=\frac{1}{2}[sh(x+y)+sh(x-y)]. \quad (39)$$

Дифференцируем его по переменной x

$$\frac{\partial}{\partial x}shx\cdot chy=chx\cdot chy,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}[sh(x+y)+sh(x-y)]\right)=\frac{1}{2}[ch(x+y)+ch(x-y)].$$

В результате получим формулу

$$chx\cdot chy=\frac{1}{2}[ch(x+y)+ch(x-y)]. \quad (40)$$

Дифференцируем (39) по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}shx\cdot chy=shx\cdot shy,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}[sh(x+y)+sh(x-y)]\right)=\frac{1}{2}[ch(x+y)-ch(x-y)].$$

В результате получим формулу

$$shx\cdot shy=\frac{1}{2}[ch(x+y)-ch(x-y)]. \quad (41)$$

Формулы для обратных тригонометрических функций

Запишем равенство $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ и интегрируем его. Поскольку $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$ $=\arcsin x+C_1$, с одной стороны, а $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C_2$, с другой стороны, то $\arcsin x+\arccos x=C$. При $x=0$ имеем $\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}. \qquad (42)$$

Аналогично запишем равенство $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ и интегрируем его. Поскольку $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C_1$, с одной стороны, а $\int\frac{dx}{1+x^2}=-arcctgx+C_2$, с другой стороны, то $arctgx+arcctgx=C$. При $x=0$ имеем $arctg0+arcctg0=\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$arctgx+arcctg=\frac{\pi}{2}. \qquad (43)$$

Обратные гиперболические функции $arshx$, $archx$, $arthx$, $arcthx$ имеют аналитические формы выражения. Найдем $y=arshx$ как решение уравнения $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=y.$

$$e^{2x}-2ye^x-1=0\Rightarrow e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right).$$

Оставим знак «+», поскольку $e^x>0$

$$arshx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right). \qquad (44)$$

Дифференцируем это равенство

$$(arshx)'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Отсюда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=arshx+C. \qquad (45)$$

Найдем $y=archx$ как решение уравнения $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y.$

$$e^{2x}-2ye^x+1=0\Rightarrow e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right),$$

$$\begin{cases}y\pm\sqrt{y^2-1}>0\\ y^2>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\pm\sqrt{y^2-1}>0\\ |y|>1\end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$archx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|. \qquad (46)$$

Дифференцируем это равенство: $(archx)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Отсюда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = archx + C. \quad (47)$$

Некоторые тригонометрические и гиперболические равенства

К тождеству $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^n = 1$ применим бином Ньютона

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{2k} x \sin^{2n-2k} x = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cos^{2k} x \sin^{2n-2k} x.$$

В сумме объединим слагаемые с одинаковыми биномиальными коэффициентами вида $C_n^k = C_n^{n-k}$. Вынесем общий множитель вида $\cos^{2k} x \sin^{2k} x$ и в результате получим равенство

$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^n = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x + \sum_{k=1}^{n/2} C_n^k \left(\cos^{2n-4k} x + \sin^{2n-4k} x\right)\cos^{2k} x \sin^{2k} x,$$

из которого следует равенство

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = 1 - \sum_{k=1}^{n/2} C_n^k \left(\cos^{2n-4k} x + \sin^{2n-4k} x\right)\cos^{2k} x \sin^{2k} x. \quad (48)$$

Применим это равенство для $n = 2,3,4,5$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - C_2^1 \cos^2 x \cdot \sin^2 x,$$
$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - C_3^1\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\cos^2 x \sin^2 x,$$
$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - C_4^1\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right)\cos^2 x \sin^2 x - C_4^2 \cos^4 x \sin^4 x,$$
$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1 - C_5^1\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)\cos^2 x \sin^2 x - C_5^2\left(\cos^2 x + \cos^2 x\right)\cos^4 x \sin^4 x,$$
$$\sin^{12} x + \cos^{12} x = 1 - C_6^1\left(\sin^8 x + \cos^8 x\right)\cos^2 x \sin^2 x - C_6^2\left(\cos^4 x + \cos^4 x\right)\cos^4 x \sin^4 x - C_6^3 \cos^6 x \sin^6 x.$$

и т.д.

Подставим выражения $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$ из предыдущих равенств, преобразуем и результаты сведем в табл. 1.

Аналогично тригонометрическому тождеству рассмотрим гиперболическое равенство $\left(ch^2 x - sh^2 x\right)^n = 1$

$$\left(ch^2 x - sh^2 x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k sh^{2k} x ch^{2n-2k} x =$$
$$= ch^{2n} x + (-1)^n sh^{2n} x + \sum_{k=1}^{n/2} (-1)^k C_n^k \left(ch^{2n-4k} x + (-1)^n sh^{2n-4k} x\right) sh^{2k} x ch^{2k} x. \quad (49)$$

Применим это равенство для $n = 2,3,4,5$

$$ch^4 x + sh^4 x = 1 + C_2^1 ch^2 x \cdot sh^2 x,$$
$$ch^6 x - sh^6 x = 1 + C_3^1 ch^2 x sh^2 x,$$
$$sh^8 x + ch^8 x = 1 + C_4^1\left(sh^4 x + ch^4 x\right)ch^2 x sh^2 x - C_4^2 ch^4 x sh^4 x,$$
$$sh^{10} x - ch^{10} x = 1 + C_5^1\left(ch^6 x - sh^6 x\right)ch^2 x sh^2 x - C_5^2 ch^4 x sh^4 x,$$
$$sh^{12} x + ch^{12} x = 1 + C_6^1\left(sh^8 x + ch^8 x\right)ch^2 x sh^2 x - C_6^2\left(sh^4 x + ch^4 x\right)ch^4 x sh^4 x + C_6^3 ch^6 x sh^6 x.$$

и т.д.

Подставим выражения $sh^{2n}x + ch^{2n}x$ из предыдущих равенств, преобразуем их и результаты сведем в таблицу.

Таблица 1

Тригонометрические тождества	Гиперболические тождества
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x$	$ch^4x + sh^4x = 1 + 2ch^2x \cdot sh^2x$
$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x$	$ch^6x - sh^6x = 1 + 3ch^2x \cdot sh^2x$
$\cos^8 x + \sin^8 x = 1 - 4\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x \sin^4 x$	$ch^8x + sh^8x = 1 + 4ch^2x \cdot sh^2x - 2ch^4xsh^4x$
$\cos^{10} x + \sin^{10} x = 1 - 5\sin^2 x \cos^2 x + 5\cos^4 x \sin^4 x$	$ch^{10}x - sh^{10}x = 1 + 5ch^2x \cdot sh^2x + 5ch^4xsh^4x$
$\cos^{12} x + \sin^{12} x = 1 - 6\sin^2 x \cos^2 x + 9\cos^4 x \sin^4 x +$ $+ 8\cos^6 x \sin^6 x$	$ch^{12}x + sh^{12}x = 1 + 6ch^2x \cdot sh^2x + 9ch^4xsh^4x -$ $- 8ch^6xsh^6x$

Дифференцируем тождества таблицы, получим ряд новых соотношений. Например,

$$\left(\cos^{12} x + \sin^{12} x\right)' = 12\left(\sin^{10} x - \cos^{10} x\right)\sin x \cos x,$$

$$\left(1 - 6\sin^2 x \cos^2 x + 9\cos^4 x \sin^4 x + 8\cos^6 x \sin^6 x.\right)' =$$

$$= 12(-\sin x \cos x + 3\cos^3 x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin^3 x)(-\sin^2 x. + \cos^2 x).$$

$$\cos^{10} x - \sin^{10} x = (1 - 3\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos^4 x \sin^4 x)(\cos^2 x - \sin^2 x.).$$

$$\left(ch^{12}x + sh^{12}x\right)' = 12\left(sh^{10}x + ch^{10}x\right)shxchx, \quad \left(1 + 6ch^2x \cdot sh^2x + 9ch^4xsh^4x - 8ch^6xsh^6x\right)' =$$

$$= 12\left(chx \cdot shx + 3ch^3xsh^3x - 4ch^5xsh^5x\right)\left(sh^2x + ch^2x\right)$$

$$ch^{10}x + sh^{10}x = \left(1 + 3ch^2xsh^2x - 4ch^4xsh^4x\right) \cdot \left(ch^2x + sh^2x\right)$$

и т.д.

Снова сведем результаты в таблицу.

Таблица 2

Тригонометрические тождества	Гиперболические тождества
$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$ch^4x - sh^4x = sh^2x + ch^2x$
$\cos^6 x - \sin^6 x = \left(1 - \cos^2 x \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$	$ch^6x + sh^6x = \left(1 - ch^2xsh^2x\right)\left(sh^2x + ch^2x\right)$
$\cos^8 x - \sin^8 x = \left(1 - 2\cos^2 x \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$	$ch^8x - sh^8x = \left(1 + 2ch^2xsh^2x\right)\left(ch^2x + sh^2x\right)$
$\cos^{10} x - \sin^{10} x = (1 - 3\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos^4 x \sin^4 x) \cdot$ $\cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$	$ch^{10}x + sh^{10}x = \left(1 + 3ch^2xsh^2x - 4ch^4xsh^4x\right) \cdot$ $\cdot \left(ch^2x + sh^2x\right)$

Заключение

В работе показана дифференциальная и интегральная связь между различными тождествами. Исходя из какого-либо тождества, путем дифференцирования или интегрирования последнего, получают новые тождества. В работе воспроизведен ряд известных тригонометрических тождеств.

По мнению авторов ими предложен более простой способ вывода формулы Эйлера по сравнению с традиционным, при котором данная формула выводится с помощью степенных рядов [2-4]. Кроме того, на основании тождества Лагранжа и формулы Эйлера удалось представить скалярное и векторное произведение векторов в комплексной форме и записать для этого случая формулу Муавра.

В большинстве своем тригонометрические тождества при многократном дифференцировании обладают своеобразным свойством возвращаться к исходному виду. Это

объясняется тем, что производная от производной таких тригонометрических функций, как $\sin x$ и $\cos x$, с точностью до знака, опять дает прежние функции $\sin x$ и $\cos x$.

В работе также показана возможность получения ряда неопределенных интегралов от некоторых функций. Метод имеет широкие возможности и его применение выходит за рамки данной статьи. Он может применяться при доказательстве ряда тождественных соотношений и неравенств [1], а также для получения новых тождеств, вычисления интегралов и т.п.

Литература

1. Улитин Г.М. Применение производной для доказательства тождеств и неравенств / Г.М. Улитин, В. Соосар // Математическая культура инженера : мат-лы региональной студенческой конференции. – Донецк, 2010. – С. 229-233.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Т. I. – 571 с.
3. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд-во «ФМЛ», 1956. – Т. 1. – 472 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, Изд-во «ФМЛ», 1972. – Т. 2. – 795 с.
5. Ильин В.А.Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд-во «ФМЛ», 1999. – 296 с.
6. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, Изд-во «ФМЛ», 1974. – 774 с.

Л.П. Міроненко, І.В. Петренко

Диференціальні перетворення тотожностей як метод отримання нових співвідношень

У статті розглянуто диференціальні та інтегральні перетворення різних тотожностей. Показано, як похідні від відомих тотожностей призводять нові тотожності, а також вже існуючі. Метод дозволяє легко отримати нові співвідношення, а також довести відомі тотожності. На думку авторів запропонован більш простий спосіб отримання формули Ейлера, у той час, як при класичному підході вона дістається за допомогою теорії степеневих рядів. Крім того, на підставі тотожності Лагранжа і формули Ейлера вдалось отримати скалярне і векторне множення векторів у комплексній формі і зробити запис для цього випадка формули Муавра. У своєй більшості тригонометричні тотожності мають властивість повернення до початкового співвідношення після двох операцій диференціювання. Метод має широкі можливості, які виходять за межі цієї статті. Він також може бути корисним для доказу тотожностей та нерівностей, для отримання нових тотожностей, для розрахунку інтегралів.

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko

Differential Transformations of Identities as the Method for Obtaining New Correlations

The purpose of the paper is the further development of the well-known in mathematics method for transformation of identities. Some differential and integral transformations of various identities of the mathematical analysis are proposed in the paper. The method has good mathematical possibilities and is wider than this paper. It can be applied for proving identities and inequalities and obtaining new identities. So, a simple proof of the Euler’s formula is offered. Besides, we have got representation of the scalar and vector products of in a complex form that allows applying the Lagrange’s identity and the Euler's formula. Most of new identities obtained by this method are presented in the tables.

Статья поступила в редакцию 22.11.2010.